RÉVISIONS ANALYSE

1. Analyse réelle

1.1. sup, inf, $\overline{\lim}, \underline{\lim}$ ..

Définition 1. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$,on dit que A est borné supérieurement si $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in A$, $x \leq M$. On appelle $\sup A$ « supremum de A » le plus petit des majorants, c'est à dire le nombre tel que

$$\forall M \text{ t.q. } x \leq M \text{ si } x \in A \text{ alors } M \geq \sup A.$$

S'il est atteint, $\sup A$ devient le « maximum de A » . Par extension, si A n'est pas borné supérieurement, on écrit $\sup A = \infty$.

Symétriquement, on appelle $\inf A$, « infimum de A », le plus grand des minorants, qui est $\min A$ le « minimum de A » si il est atteint.

Ainsi

$$A = [0, 1]$$

est borné, avec un min et un max,

$$A = [0, 1[$$

a un sup mais pas un max, et

$$A =]-\infty, 2] \cup [3, 4]$$

n'est pas borné inférieurement.

On a

$$\sup_A x = \sup A = \inf_{M \geq A} M = \inf \{M : \forall x \in A, M \geq x\}.$$

Définition 2. Étant donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\sup_A f = \sup f(A) = \sup \{f(x) : x \in A\}.$$

Définition 3. On rappelle que x est la *limite* de la suite (x_n) si $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x| \leq \epsilon$.

Proposition 4. *Le* Critère de Cauchy *est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle converge*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n, p \geq N \quad |x_n - x_p| < \epsilon.$$

Théorème. *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

On voit tout de suite que la suite $(-1)^n$ admet deux sous suites convergentes. En général, on introduit deux objets, $\underline{\lim}$ « lim inf » et $\overline{\lim}$ « lim sup ».

— on appelle « lim sup de x_n » [1]

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n &= \limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\, x_n \\ &= \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} x_n.\end{aligned}$$

— on appelle « lim inf de x_n » [2]

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n &= \liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n \\ &= \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} x_n.\end{aligned}$$

Pour la suite précédente $(-1)^n$, on retrouve nos deux sous suites. [3]

Proposition. *On a toujours*

$$\overline{\lim}\, x_n \geq \underline{\lim}\, x_n,$$

$$\overline{\lim}\,(-x_n) = -\,\underline{\lim}\, x_n$$
$$\overline{\lim}\,(x_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, v_n$$

Ce qui nous permet de d'exhiber une autre condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite,

Théorème 5. *Étant donné une suite (x_n), $x_n \to x$ si et seulement si $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = x \in \mathbb{R}$.*

---

1. Cette limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}$: soit la suite n'est pas bornée supérieurement, auquel cas $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$, soit la suite est bornée supérieurement, auquel cas $\sup_{n\geq N} x_n$ est une suite réelle décroissante qui converge donc soit vers $-\infty$ soit une limite finie.

2. Cette limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}$: soit ... $-\infty$, soit ... $+\infty$, soit une limite finie.

3. En général, cela permet de construire « presque » ces suites convergentes. En effet $w_N = \sup_{n\geq N} x_n$ est une suite bornée décroissante, donc convergente. Mais il reste une difficulté, parce que ce sup n'est pas forcément atteint, et que donc ce n'est pas nécessairement une suite extraite, et qu'il faut bien vérifier qu'il y a un nombre de terme infini. Pour régler ce problème, on approche w_n par une suite de x_n. Supposons $\limsup x_n < \infty$. On pose $\sigma(0) = 0$. Pour tout $n \geq 1$ soit $\sigma(n)$ le plus petit entier plus grand que $\sigma(n-1)$ tel que

$$x_{\sigma(n)} > \sup_{k\geq n} x_k - \frac{1}{n}.$$

On voit que la fonction $n \to \sigma(n)$ est croissante et infinie, et donc c'est bien une suite extraite. Par sandwich, $\lim x_{\sigma(n)} = \limsup x_n$. Si $\limsup x_n = \infty$, on choisit $\sigma(n)$ le plus petit entier plus grand que $\sigma(n-1)$ tel que $x_{\sigma(n)} > n$.

En effet si $x_n \to x$,alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x| \leq \epsilon$, donc $x_n - x \leq \epsilon$ et $x - x_n \leq \epsilon$ et ainsi

$$\sup_{n \geq N} x_n \leq x + \epsilon, \text{ et } x - \epsilon \leq \inf_{n \geq N} x_n$$

et en passant à la limite en N,

$$\overline{\lim}\, x_n \leq x + \epsilon \text{ et } \underline{\lim}\, x_n \geq x - \epsilon.$$

Donc $\forall \epsilon > 0$,

$$\overline{\lim}\, x_n \geq \underline{\lim}\, x_n \geq \overline{\lim}\, x_n - 2\epsilon,$$

et en passant à la limite

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = x.$$

Inversement, si $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = x$, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe

$$N_1 \text{ t.q. } \sup_{n \geq N_1} x_n \leq x + \epsilon, \text{(limsup converge vers } x\text{)}$$

et

$$N_2 \text{ t.q. } \inf_{n \geq N_2} x_n \geq x - \epsilon, \text{(liminf converge vers } x\text{)}$$

donc pour tout $n \geq N := \max(N_1, N_2)$, on a

$$x - \epsilon \leq \inf_{p \geq N'} x_p \leq x_n \leq \sup_{p \geq N} x_p \leq x + \epsilon,$$

autrement dit

$$|x_n - x| \leq \epsilon,$$

on a donc établi la convergence de la suite.

1.2. **Fonctions continues.**

Définition 6. On dit que f est continue en $x \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Théorème 7. *La fonction f est continue en x si et seulement si pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to x$ on a $f(x_n) \to f(x)$.*

On a

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{y \to x}}\, f(y) &= \lim_{\eta \to 0} \sup_{\substack{|y-x|<\eta \\ y \neq x}} f(y) \\ &= \sup \left\{ \lim_{n \to \infty} f(x_n) : x_n \to x \right\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{y\to x} f(y) &= \lim_{\eta\to 0} \inf_{\substack{|y-x|<\eta \\ y\neq x}} f(y) \\ &= \inf\left\{\lim_{n\to\infty} f(x_n) : x_n \to x\right\}\end{aligned}$$

1.3. **Suites et séries de fonctions.**

Définition 8. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeur dans I.

— On dit que (f_n) converge simplement vers f, $f_n \overset{\text{simple}}{\to} f$ si $\forall x \in I$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

— On dit que (f_n) converge uniformément vers f, $f_n \overset{\text{uniformément}}{\to} f$ si $\forall x \in I$ on a $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Ce n'est pas la même chose ; par exemple $(1-x)^n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $(0,1]$, mais pas uniformément comme $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \exp(-1)$.

On note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|,$$

alors

$$f_n \overset{\text{uniformément}}{\to} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty.$$

Théorème. *Si* $f_n \overset{uniform\acute{e}ment}{\to} f$*, alors* $f_n \overset{simple}{\to} f$*, mais le contraire est faux.*

Si $f_n \in \mathcal{C}^0(I)$ *et* $f_n \overset{uniform\acute{e}ment}{\to} f$ *alors* $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Théorème 9. *Soient* a, b *tels que* $-\infty < a < b < \infty$*, et soit* $f_n \overset{uniform\acute{e}ment}{\to} f$ *. Alors*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

De plus si $f_n' \overset{uniform\acute{e}ment}{\to} g$ *et*[4] *que* $f_n(x_0) \to f_0$ *pour un certain* $x_0 \in I$*, alors*

$$f_n \overset{uniform\acute{e}ment}{\to} f(x) = \int_{x_0}^x g\,dx + f_0.$$

Ce n'est pas le meilleur résultat disponible : pour l'améliorer il faut préciser ce que l'intégrale veut dire. Mais pas seulement :

il n'est pas vrai si une suite de fonctions converge simplement (pour chaque $x \in [a,b]$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$), alors $\int_a^b f_k(x)\,dx$ tend vers $\int_a^b f(x)\,dx$.[5]

Il faut donc une hypothèse supplémentaire. On le verra bientôt.

4. Il faut inclure cette convergence en un point (pensez à une suite de fonctions constantes pour des contre-exemples).

5. Pensez à un contre exemple (une fonction de plus en plus grande sur des ensembles de plus en plus petits).

1.4. **Séries de fonctions.** Notons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Pour les séries, on distingue trois types de convergences. Deux sont héritées des suites, la convergence simple et la convergence uniforme :

$$\forall x, \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

et

$$\sup_{x\in I} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| = \|S_n - S\|_\infty \to 0.$$

La troisième est la convergence normale,

$$\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_\infty < \infty.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on montre :

Théorème 10. *Convergence Normale implique Convergence Uniforme implique Convergence Simple.*

2. Intégration

2.1. **Integrale de Riemann.**

Définition 11 (Somme de Darboux)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit S une subdivision de $[a, b]$. On note

$$m_i = \inf_{]s_i,s_{i+1}[} f, \quad M_i = \sup_{]s_i,s_{i+1}[} f.$$

On appelle *sommes de Darboux* de f sur la subdivision S les nombres

$$\sigma(S, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)m_i, \quad \Sigma(S, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)M_i.$$

Lorsqu'on remplace S par une subdivision plus fine (i.e. qui la contient), $\sigma(S, f)$ augmente, $\Sigma(S, f)$ diminue mais on a toujours $\sigma(S, f) \leq \Sigma(S, f)$. Cela fait penser aux suites adjacentes. Pour qu'il y ait une limite, il suffit que la différence tende vers 0.

Définition 12. On dit qu'une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *Riemann-intégrable* si, quand le pas $|S|$ tend vers 0, la différence $\Sigma(S, f) - \sigma(S, f)$ tend aussi vers 0. Sa limite est l'*intégrale* de f, notée $\int_a^b f(t)\, dt$.

L'intégrale de Riemann est plus restrictive sur la régularité des fonctions intégrables que celle de Lebesgue. Par contre (via les intégrales impropres) elle permet de définir les intégrales semi-convergentes [6].

2.2. **Intégrale de Lebesgue.** On définit les mesures sur les ensembles mesurables.

Proposition 13 (Propriétés de la famille des ensembles mesurables)**.**

(1) Si A est mesurable, son complémentaire l'est aussi.
(2) Si A et B sont mesurables, leur réunion $A \cup B$ l'est aussi.
(3) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles mesurables, alors la réunion $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ est mesurable.
(4) L'ensemble vide est mesurable.

Définition 14. Une *tribu* $\mathcal{T}$, ou σ-algèbre, sur un ensemble E est une famille de sous-ensembles de E qui satisfait ces 4 propriétés.

Exercice 15. Si $(A_k) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ alors $\cap_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{T}$, $\quad \overline{\lim}\, A_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T}$, $\quad \underline{\lim}\, A_n = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} A_k \in \mathcal{T}$.

Définition 16. La *tribu borélienne* de $\mathbb{R}$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles. Elle contient tout ce qu'on peut obtenir à partir d'intervalles en faisant des réunions et intersections dénombrables, et des passages au complémentaire.

On appelle ensemble *borélien* un élément de la tribu borélienne.

Définition 17. La *tribu borélienne* de $\mathbb{R}^2$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^2$ contenant tous les *rectangles*, i.e. les ensembles de la forme $I \times I'$, où I et I' sont des intervalles. Elle contient tout ce qu'on peut obtenir à partir de rectangles en faisant des réunions et intersections dénombrables, et des passages au complémentaire.

Remarque 18. Les réunions finies de rectangles sont boréliennes. Par ce moyen, on n'obtient que des polygones dont les côtés sont parallèles aux axes. En considérant des réunions dénombrables, on obtient beaucoup plus d'exemples (en fait, tous les ensembles qu'on peut imaginer sont boréliens).

Exercice 19. Tout demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ appartient à la tribu borélienne.

Définition 20. Une *mesure* sur un ensemble E muni d'une tribu $\mathcal{T}$ est une application $\mathcal{T} \to [0, +\infty]$ qui satisfait les 3 propriétés suivantes :

(1) L'ensemble vide a une mesure nulle.
(2) *Additivité.* Si A et B sont mesurables et deux à deux disjoints, la mesure de $A \cup B$ est la somme des mesures de A et de B.

6. comme par exemple $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x} \mathrm{d}x$

(3) *σ-additivité.* Si (A_k) est une suite d'ensembles mesurables et deux à deux disjoints, la mesure de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ est la somme des mesures des A_k.

Exemple 21. Sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, soit δ_a la mesure définie par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On l'appelle la *mesure de Dirac* au point a.

Théorème 22 (H. Lebesgue, admis)**.** *Sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, il existe une unique mesure λ telle que pour tout $a < b$, $\lambda(]a, b[) = b - a$.*

Exemple 23. L'ensemble de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est mesurable, de mesure nulle. C'est un ensemble dénombrable, et chaque rationnel à une mesure nulle.

Définition 24. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si pour tout ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(B) = \{x \in E\,;\, f(x) \in B\}$ est mesurable (appartient à $\mathcal{T}$).

Proposition 25. *Pour vérifier qu'une fonction $f : E \to [-\infty, \infty]$ est mesurable, il suffit de vérifier que les ensembles $f^{-1}(]a, \infty])$ sont mesurables. Pour vérifier qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, il suffit de vérifier que les ensembles $f^{-1}(]a, \infty[)$ sont mesurables.*

Exemple 26. Toute fonction à valeur réelle continue sur $\mathbb{R}$ est mesurable. En effet, si f est continue, $f^{-1}(]a, \infty[)$ est un ouvert, donc une réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice 27. Soit $f_k : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k$ et $\liminf_{k\to\infty} f_k$ sont mesurables. En particulier, si f_k converge simplement vers f, alors f est mesurable.

Définition 28. Soit E un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ. On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées[7] positives. Soit $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On pose

$$\int f\, d\mu = \sup_{\{g\in\mathcal{E}_+\,;\, g\le f\}} \int g\, d\mu.$$

Si $\int f d\mu < +\infty$, f est intégrable.

Pour une fonction de signe quelconque, si $|f|$ est intégable, on pose

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

7. prenant un nombre fini de valeurs

où $f^+ = \max\{0, f\}$ et $f^- = \max\{0, -f\}$.

On note $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables.

Exemple 29. Soit $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{T}$ = tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$, μ = mesure de comptage. Pour toute fonction (positive) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\int f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$.

Théorème 30 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit E un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ. Soit (f_n) une suite croissante (i.e. $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions mesurables positives qui converge vers f. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu = \int (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\mu.$$

Autrement dit, si la suite de fonctions est positive croissante, on peut intervertir intégrale et limite.

Définition 31. Soit E un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ. On dit qu'une propriété est vraie *presque partout* (noté p.p.), si elle est vraie en dehors d'une ensemble mesurable de mesure nulle.

Lemme 32 (Lemme de Fatou)**.** *Soit E un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ. Soit (f_n) une suite quelconque de fonctions mesurables positives sur E. Alors*

$$\int (\liminf f_n)\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu.$$

Démonstration. On utilise la caractérisation suivante de la lim inf, et onn applique le théorème de convergence monotone à la suite de fonctions $g_k = \inf_{n\geq k} f_n$, il vient

$$\int (\liminf f_n)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k\, d\mu.$$

Pour tout $n \geq k$, $g_k \leq f_n$, donc $\int g_k\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu$, et en prenant l'inf,

$$\int g_k\, d\mu \leq \inf_{n\geq k} \int f_n\, d\mu,$$

puis en passant à la limite pour ces deux suite croissantes,

$$\int (\liminf f_n)\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} \int f_n\, d\mu = \liminf \int f_n\, d\mu.$$

□

Théorème 33 (Théorème de convergence dominée, H. Lebesgue)**.** *Soit E un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ. Soit (f_k) une suite de fonctions intégrables sur E telle que*

(1) Convergence. *Pour presque tout $x \in E$, la limite $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existe.*

(2) Domination. *Pour tout k, pour presque tout $x \in E$, $|f_k(x)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive* indépendante de k.

(3) Intégrabilité. *g est une fonction intégrable sur E.*

Alors f est intégrable sur E, et

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int (\lim_{k\to\infty} f_k) \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Exemple 34. Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^k$ si $x \in [0,1]$, 0 ailleurs. Alors la suite (f_k) converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 en 1 et 0 ailleurs. Par conséquent,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \, dx = 0.$$

Pourtant, la suite de fonctions (f_k) ne converge pas uniformément vers f.

Exemple 35. Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in [k, k+1]$, 0 ailleurs. Alors la suite (f_k) converge simplement vers 0. Pourtant

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \, dx = 1.$$

L'hypothèse de domination est satisfaite avec $g = 1$, mais g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. Espaces Métriques

On généralise maintenant à des espaces plus généraux que la droite réelle, et on rappelle les différences (et les points communs) avec l'analyse réelle.

Définition 36. Soit X un ensemble, on dit que (X, d) est un espace métrique si d est une distance, à savoir pour tout $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned} & d(x,y) \geq 0, \\ & d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ & d(x,y) = d(y,x) \\ & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Bien entendu, $\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot - \cdot\|_2\right)$ où $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$ est un espace métrique, comme tous les *espaces vectoriels normés.*

Dans un e.v.n, la distance est héritée de la norme, $d(x,y) = \|x - y\|$, qui vérifie $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, et $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Sur $\mathbb{R}^d$, une autre norme fréquemment rencontrée est $\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_d|^p)^{1/p}$,pour $p \geq 1$ et $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$ la norme sup [8].

Tous les e.v.n. sont des espaces métriques, mais pas le contraire. Par exemple,

$$X = \left\{x_1^2 + x_2^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

n'est pas un espace vectoriel, mais on peut introduire la distance $d(x,y) = \|x-y\|_2$ et avoir un espace métrique. Une autre distance est la distance angulaire : $x = \exp(i\theta) = (\cos\theta_x, \sin\theta_x)$ alors $|x-y| = \min_{k\in\mathbb{Z}} |\theta_x - \theta_y + 2k\pi|$ est la distance angulaire. L'espace $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_{SNCF})$ où

$$d_{\mathrm{SNCF}}(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{si } x \text{ et } y \text{ non colinéaires,} \\ |x-y| & \text{sinon} \end{cases}$$

est un espace vectoriel mais pas un e.v.n. : la distance choisie est importante.

Définition 37. Un espace métrique (X,d) est *complet* si toute suite de Cauchy converge, c'est à dire, pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists N$ t.q. $\forall n \geq N$ et $\forall p \geq N$ $d(x_n, x_p) < \epsilon$, il existe $x \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Ainsi, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, alors que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet,

Proposition. *Si (X,d) est un espace métrique, et que $Y \subset X$ alors (Y,d) est un espace métrique.*

Théorème 38. *L'espace $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\|_\infty\right)$ est un espace métrique complet.*

Démonstration. C'est un espace métrique, parce que c'est un e.v.n. On vérifie les propriétés des normes

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \sup_{[0,1]} |f(x)| \geq 0, \\
\|f\|_\infty &= 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1]\, f(x) = 0, \text{ donc } f \equiv 0, \\
\|\lambda f\|_\infty &= \sup_{[0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{[0,1]} |\lambda|\, |f(x)| = |\lambda| \sup_{[0,1]} |f(x)| = |\lambda|\, \|f\|_\infty \\
\|f+g\|_\infty &= \sup_{[0,1]} |(f+g)(x)| \leq \sup_{[0,1]} (|f(x)| + |g(x)|) \\
&\leq \sup_{[0,1]} |f(x)| + \sup_{[0,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Vérifions qu'il est complet. Soit une suite de Cauchy dans $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\|_\infty\right)$, autrement dit, telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\exists N$ t.q. $\forall n \geq N$ et $\forall p \geq N$ $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f_p(x)| <$

8. On remarque que

$$\max_k |x_k| \leq \|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_d|^p)^{1/p} \leq d^{\frac{1}{p}} \max_k |x_k| ,$$

donc $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

ϵ. Alors en particulier, pour chaque x, la suite réelle $(f_n(x)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et donc converge vers une limite, que l'on note $f(x)$. Montrons maintenant que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Soit $\epsilon > 0$, et N t.q. $\forall n \geq N$ et $\forall p \geq N$ $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f_p(x)| \leq \epsilon$. Alors $\forall x \in [0,1]$, on a

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \|f_n - f_p\|_\infty \leq \epsilon$$
$$\text{donc } |f_n(x) - f(x)| = \lim_{p\to\infty} |f_n(x) - f_p(x)| \leq \epsilon$$
$$\text{et } \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. En utilisant le théorème précédent, que la limite uniforme d'une fonction continue est continue, on a bien montré la complétude. □

La preuve serait exactement la même pour $(\mathcal{C}_B^0(X,Y), \|\|_\infty)$ où (X,d_1) et (Y,d_2) sont deux espaces métriques, et que (Y,d_2) est un espace métrique complet. Dans ce cadre, $\mathcal{C}_B^0(X,Y)$ veut dire borné : $\sup_x d(f(x), f(x_0)) < \infty$ (pour un x_0), et continue

$$d_1(x,y) \to 0 \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) \to 0.$$

Exercice 39. Montrons que $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace métrique [9], avec $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$.

Démonstration. A nouveau, on profite de la structure d'Espace Vectoriel Normé, si on montre que $\|\cdot\|_p$ est une norme [10].

On peut par exemple utiliser l'inégalité de Minkowski en dimension finie, à savoir pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et $b \in \mathbb{R}^d$ on a

$$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p,$$

et, pour passer de la dimension finie à la dimension infinie, utiliser les suites de Riemann

$$\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \dots$$

□

Pour discuter de continuité dans des cas plus généraux que la droite réelle on introduit les boules, et les ouverts

Définition 40. Pour tout $x \in (X,d)$

9. Cet espace n'est pas complet, nous reverrons cela en TD.
10. Pour $p \geq 1$,bien sûr, sinon ce n'est pas vrai

— on appelle boule ouverte centrée en x et de rayon r l'ensemble $B(x,r) := \{y : d(x,y) < r\}$.
— on appelle boule ouverte fermée en x et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(x,r) := \{y : d(x,y) \leq r\}$.

Exemple 41. Les boules dépendent bien sûr de la distance choisie. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\|_\infty)$ les boules sont des carrés, alors que dans $(\mathbb{R}^2, \|\|_2)$ ce sont des disques.

Définition 42. On dit que $\Omega \subset X$ est ouvert si $\forall x \in \Omega\ \exists r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \Omega$. On dit que $F \subset X$ est fermé si F^c est ouvert.

Exemple 43. Une boule fermée est fermée. Pour tout $x \in \overline{B}(0,1)^c$, choisissons $r_x = \frac{d(x,0)-1}{2} > 0$. Pour tout $y \in B(x, r_x)$ on a $d(x,0) \leq d(x,y) + d(y,0)$, ainsi

$$d(y,0) > \frac{1}{2}(d(x,0)+1) > 1.$$

Conséquement, $y \in B(0,1)^c$, donc

$$B(x, r_x) \subset B(0,1)^c.$$

Théorème 44. *L'ensemble $F \subset X$ est fermé si et seulement si toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente dans X a sa limite dans F.*

Démonstration. Supposons F fermé et soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \to x$. Si $x \notin F$, comme $x \in F^c$ qui est ouvert, donc il existe une boule $B(x,r) \subset F^c$. A partir d'un certain rang $d(x_n, x) < r/2$, donc $x_n \in B(x,r)$, et $x_n \notin F$, ce qui est une contradiction.

Inversement, soit $x \in F^c$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y ait $x_n \in (F^c)^c = F$ tel que $d(x_n, x) < (n+1)^{-1}$. Alors la suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente dans X est convergente, ce qui est une contradiction. Donc il existe n_0 tel que pour tout $d(x_n, x) < (n+1)^{-1} \Rightarrow x \in F^c$, donc F^c est ouvert. □

Cela nous permet de montrer d'une autre manière que la boule fermée est fermée. Soit $(z_n) \in \overline{B}(x,r)^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \to z$. Pour tout n,$d(z_n, x) \leq r$. L'application $d \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$,donc en passant à la limite $d(z,x) \leq r$.

Théorème 45. *Soit Ω un ouvert de (Y, d_2), et $f \in \mathcal{C}^0((X,d_1),(Y,d_2))$. Alors $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de (X, d_1).*

Démonstration. Soit $x \in f^{-1}(\Omega)$. Par définition, Soit $f(x) = y \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, $B(y, \epsilon) \subset \Omega$ pour un $\epsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $d_1(x,z) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(z)) < \epsilon$. Donc $B(x,\delta) \subset f^{-1}(\Omega)$. □

Cela implique aussi que l'image réciproque d'un fermé est un fermé [11].

11. Mais pour l'image directe, il n'en est rien, ouvert ou fermé (penser à l'application constante pour ouvert => fermé) et arctan pour fermé => ouvert par exemple.

Proposition 46. *Soit* $(\Omega_i)_{i\in I}$ *est une collection d'ouverts (pas nécessairement finie ou dénombrable). Alors* $\cap_{i=1}^N \Omega_i$ *est ouvert, et* $\cup_{i\in I}\Omega_i$ *est ouvert.*

Soit $(F_i)_{i\in I}$ *est une collection d'ouverts (pas nécessairement finie ou dénombrable). Alors* $\cap_{i\in I}F_i$ *est fermé, et* $\cup_{i=1}^N F_i$ *est fermé.*

Attention, $\cap_{n\geq 1}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[=\{0\}$ est fermé.

Définition 47. On appelle l'adhérence de Ω l'ensemble

$$\overline{\Omega}=\cap_{\substack{\Omega\subset F\\ F\text{ fermé}}}=\left\{\lim x_n,(x_n)\in\Omega^{\mathbb{N}}\right\}.$$

Par exemple, $\overline{]0,1[}=[0,1]$.

Définition 48. On appelle intérieur de Ω l'ensemble

$$\mathring{\Omega}=\cup_{\substack{E\subset\Omega\\ E\text{ ouvert}}}E=\{x:\exists x>0\,B(x,r)\subset\Omega\}.$$

$$\partial\Omega=\overline{\Omega}\setminus\mathring{\Omega}=\{x:\forall r>0,B(x,r)\cap\Omega\neq\emptyset\text{ et }B(x,r)\cap\Omega^c\neq\emptyset\}.$$

Définition 49. On dit que Ω est borné si son diamètre $\delta=\sup_{(x,y)\in\Omega}d(x,y)$ est fini.

La boule $B(x,r)$ est bornée de diamètre $\delta=2r$.

3.1. **Compacité.**

Définition 50. Soit (X,d) un espace métrique. On dit que X est compact si il possède la propriété de Borel–Lebesgue :

Dans tout ensemble (O_i) d'ouverts recouvrant $X=\cup_i O_i$ il existe un sous-recouvrement ouvert fini $X=\cup_{i\in I_N O_i}$ avec $\#I_N<\infty$.

Théorème 51. *L'espace* (X,d) *est compact si et seulement si* $\forall(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$*, il existe une sous suite* $x_{\phi(n)}\to x\in X$.

Cela n'est vrai que dans les espaces métriques, pas en général dans les espaces topologiques [12]

Proposition 52. *Si* X *est compact alors* X *est fermé et borné. Si* X *est compact alors* X *est complet.*

Démonstration. Si $(x_n)\in X^{\mathbb{N}}$ est tel que $x_n\to x$, alors X étant compact, il existe une sous suite qui converge dans X, nécessairement vers x,donc $x\in X$, qui est donc fermé. Montrons que X est borné. Prenons une (deux) suite(s) (x_n,y_n) telles que

12. Nous n'avons pas parlé : on peut définir les notions de continuité et d'ouverts de façon plus générale. Cherchez « Espaces Topologiques sur wikipedia » pour en savoir plus.

$d(x_n, y_n) \to \delta$. Ces suites admettent une sous suite convergente, donc $x_{\phi(n)} \to x$, $y_{\phi(n)} \to y$, et $d \in \mathcal{C}^0(X \times X; \mathbb{R})$[13] ainsi $\delta = d(x,y) < \infty$.

Complétude. Si $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Elle admet une sous suite convergente $\left(x_{\phi(n)}\right)$,$\phi(n) \geq n$, de limite x.

$\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tel que si $n, p > N$ alors $d(x_n, x_p) < \epsilon$. En particulier, $d\left(x_n, x_{\phi(p)}\right) < \epsilon$. On passe à la limite en p : $d(x_n, x) \leq \epsilon$. □

Théorème 53. *Si f est continue et que X est compact alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration. Soit $y_n \in f(X)^{\mathbb{N}}$. Alors $y_n = f(x_n)$. $x_{\phi(n)} \to x$ comme X est compact donc $f(x_{\phi(n)}) \to f(x)$ comme f est continue. Ainsi $y_{\phi(n)} \to f(x)$. □

Théorème 54 (Théorème de Heine-Borel). *Dans $\left(\mathbb{R}^d, \|\|\right)$ E est compact si et seulement si E est fermé et borné.*

C'est faux en dehors de $\left(\mathbb{R}^d, \|\|\right)$. Par exemple, sur $(\mathbb{Z}, d)$ où d vaut 0 si $x = y$ et 1 sinon, avec $E = \mathbb{N}$.[14]

Théorème 55. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et que X est compact, alors f est bornée sur X et atteint ses bornes.*

Ben oui, $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact donc est fermé et borné.

3.2. **Espaces Complets.**

Théorème 56 (Théorème du Point Fixe de Banach). *Soit (X, d) un espace complet, et $f : X \to X$. Supposons qu'il existe $\theta < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) < \theta d(x,y)$* alors $\exists! \overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = \overline{x}$. De plus $\forall x \in X$ $f^n(x) \to \overline{x}$.

---

13. Donc si la distance entre $\left(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}\right)$ et (x, y) tend vers zéro alors $d\left(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}\right) \to d(x,y)$. Vérifions que $d \in \mathcal{C}^0(X \times X)$. La distance sur $X \times X$ est, par exemple,

$$d_{X \times X}((a,b),(u,v)) = \max(d(a,u), d(b,v)).$$

Et $d \in \mathcal{C}^0(X \times X)$ veut dire : si $d_{X\times X}((a,b),(u,v)) \to 0$ alors $d(a,b) \to d(u,v)$. On calcule

$$\begin{aligned} d(a,b) - d(u,v) &\leq d(a,u) + d(u,b) - d(u,v) \\ &\leq d(a,u) + d(b,v) \leq 2d_{X\times X}((a,b),(u,v)), \end{aligned}$$

et pareillement

$$d(u,v) - d(a,b) \leq 2d_{X\times X}((a,b),(u,v)),$$

donc

$$|d(u,v) - d(a,b)| \leq 2d_{X\times X}((a,b),(u,v))$$

et $d \in \mathcal{C}^0(X \times X)$ est maintenant immédiat.

14. Prenez comme recouvrement les boules de rayon 1/3

Démonstration. Montrons que la suite $f^n(x)$ est de Cauchy.

$$\begin{aligned} d\left(f^{n+m}(x), f^n(x)\right) &\leq \sum_{k=1}^{m-1} d\left(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{m-1} \theta^k\right) d\left(f^{n+1}(x), f^n(x)\right) \\ &\leq \frac{1-\theta^m}{1-\theta} \theta^n d\left(f(x), x\right) \\ &\leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d\left(f(x), x\right). \end{aligned}$$

On a montré que pour ton ϵ, il existe N, donné par

$$\frac{\theta^N}{1-\theta} d\left(f(x), x\right) < \epsilon,$$

tel que pour tout $n, p \geq N$ .. Donc toute les suites convergent. Vers quelle limite ? il faut $d\left(f(x), x\right) = 0$, donc un point fixe. Il n'y en a qu'un, par contractivité. □

Application : Théorème d'existence des solutions des Equations Différentielles Ordinaires de Cauchy–Lipschitz [15] (ou Picard–Lindelöf de l'autre côté du Rhin).

4. Connexité

4.1. Définition et propriétés.

Définition 57. On dit que (X, d) est connexe si $X = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$ et A et B ouverts alors $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

La connexité s'hérite : si $E \subset X$ et (X, d) connexe alors (E, d) connexe pour la topologie relative.

---

15. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, soient $t_0 \in \mathbb{R}$ and $y_0 \in X$, et $r_0 > 0$.

Soit $B = \{x \in X, \|x - y_0\| < r_0\} \subset X$, et $f \in \mathcal{C}^0(B; X)$. On cherche $c > 0$ et une fonction $y\colon [t_0 - c, t_0 + c] \to X$ tels que

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(y(t)), \qquad t \in [t_0 - c, t_0 + c], \qquad y(t_0) = y_0, \tag{3.1}$$

Si $\sup_B \|f(x)\| \leq M$ et qu'il existe $L > 0$ tel que $\|f(a) - f(b)\| \leq L\|f(a) - f(b)\|$, alors on peut choisir $c = \frac{r_0}{M}$, il existe une unique solution $y \in \mathcal{C}^0([t_0 - c, t_0 + c]; X)$ de (3.1), et elle est la limite uniforme sur $[t_0 - c, t_0 + c]$ de la suite (y_n) définie par

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s))\,\mathrm{d}s.$$

Exemple 58. L'intervalle $[a,b]$ est connexe mais $[2,3]\cup\{4\}$ n'est pas connexe.

Montrons que $[a,b]$ connexe : supposons $A=B\cup C$. avec B et C tous deux ouverts et disjoints. Soit $x\in B$ et $y\in C$, et disons $x<y$.

Soit $z=\sup\{t\in B\cap[x,y]\}$. Si $z\in B$ alors comme B est ouvert, il reste une boule dans B autour de z, donc ce n'est pas le plus sup. Si $z\notin B$, alors $z\in C$, mais alors il reste un peu de place dans C au dessous, et ce n'est pas le sup de B.

Réciproquement, tout ensemble connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Les singletons sont des intervalles. Si il y a deux points, $x<y$ dans A, alors nécessairement, $[a,b]\subset A$, sinon, s'il manque x,$((-\infty,x)\cap A)\cup((x,\infty)\cap A)$ est un découpage de A interdit.

Proposition 59. *Si X est connexe, les seuls sous ensembles ouverts et fermés sont X et $\emptyset$.*

Proposition 60. *Si A_i connexe, pour tout $i\in I$ et $\cap_i A_i\neq\emptyset$ alors $\cup_{i\in I}A_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $a\in\cap_i A_i$. Si $A=\cup_{i\in I}A_i$ et $A=B\cup C$ avec B et C tous deux ouverts et disjoints. Si $a\in B$, alors $a\in B\cap A_i$ pour chaque i. Et il existe i tel que $A_i\cap C\neq\emptyset$. Donc $A_i=(A_i\cap B)\cup(A_i\cap C)$, contradiction car deux ouverts de la topologie relative. □

Corollaire 61. *Si on appelle $C=\cup_{\{A \text{ connexes, } x\in A\}}A$ alors C est connexe.*

Définition. On appelle Composante connexe de x $C(x):=\cup_{\{A\text{ connexe, }x\in A\}}A$.

Proposition 62. *Si $y\in C(x)$ alors $C(y)=C(x)$. Et donc si $y\notin C(x)$,$C(y)\cap C(x)=\emptyset$. D'autre part $C(x)$ est fermé (l'adhérence d'un connexe est connexe).*

Proposition 63. *$x\sim y\Leftrightarrow C(x)=C(y)$ est une relation d'équivalence. Donc on peut découper X en composantes connexes.*

Proposition 64. *Si $f\in C^0(X,Y)$ et A connexe alors $f(A)$ connexe*

Démonstration. Écrivons $f(A)=B\cup C$. Alors $A\cap f^{-1}(B)$ et $A\cap f^{-1}(C)$ ouverts relatifs, et $A=(A\cap f^{-1}(B))\cup(A\cap f^{-1}(C))$. □

Une application :

Théorème 65 (Théorème de Bolzano (Théoreme des valeurs intermédiaires))**.** *Soit X un espace connexe et $f\in\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$. Si $a\in f(X)$, $b\in f(X)$ et $a<b$ alors $\forall c\in(a,b)$, $\exists x\in X$ t.q. $f(x)=c$.*

C'est une conséquence de la Proposition 42 (et du fait que tout ensemble connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle).

Définition 66. L'espace X est connexe par arc si pour tout $x \in X$, $y \in X$, il existe une application continue $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1];X)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Proposition 67. *Si X est connexe par arc alors X est connexe.*

Démonstration. Soit $A \subset X$, ouvert et fermé. Supposons $A^c \neq \emptyset$ et $A \neq \emptyset$. Soit $x \in A$, $y \in A^c$. Soit γ reliant continûment x à y. Considérons $J = \{t \in [0,1] : \gamma(t) \in A\}$. $\{0\} \in J$, $J \neq \emptyset$. De plus $J = \gamma^{-1}(A)$, donc J est ouvert et fermé. Alors $J = [0,1]$ donc $y \in A$,contradiction. ☐

Le contraire est faux, par exemple

$$C = \left\{ \left(\cos x + \frac{1}{x}, \sin x + \frac{1}{x} \right), x > 1 \right\} \cup \{(\cos x, \sin x), x \in [0, 2\pi]\}$$

est connexe mais pas connexe par arc [16].

Proposition 68 (Unicité globale pour Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,localement Lipschitzienne, et soient y_1 et y_2 des solutions continues de $\frac{dy}{dt} = f(y), y(0) = y_0$ sur l'intervalle I. Alors $y_1 = y_2$.*

Démonstration. En effet, $A = \{t \in I : y_1(t) = y_2(t)\}$. L'ensemble A est non vide, ouvert par le théorème de CL, et fermé par continuité de y_1 et y_2. Donc $A = I$. ☐

Proposition 69. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ où Ω est un ouvert connexe. Si f est différentiable et $Df = 0$ sur Ω, alors f est constante.*

Démonstration. Soit $x \in \Omega$, et $B(x,r) \subset \Omega$,avec $r > 0$. Montrons qu'il existe une constante $C(x,r)$ telle que $f(y) = C(x,r)$ pour tout $y \in B(x,r)$. En effet par le TFC, en considérant $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ avec $g : t \to f((1-t)x + ty)$,on a $f(y) - f(x) = \int_0^1 Dg(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 Df((1-t)x + ty) \cdot (y - x)\,\mathrm{d}s$, donc $f(x) = f(y)$.

Fixons maintenant $x_0 \in \Omega$, et appelons C_0 la constante correspondante. Soit $A = \{x \in \Omega : f(x) = C_0\}$. Cet ensemble n'est pas vide, il est (relativement) fermé, comme f est continue. Montrons qu'il est ouvert : si $x \in A$, alors $x \in \Omega$,donc par le première partie, il est constant sur $B(x,r)$, et ainsi $B(x,r) \subset A$. Donc $A = \Omega$. ☐

16. Aucun point du cercle n'est relié par un chemin à un point de la courbe, mais l'image de $(1,\infty)$ (connexe) par $t \to \left(\cos t + \frac{1}{t}, \sin t + \frac{1}{t}\right)$, est connexe, et donc son adhérence est connexe.